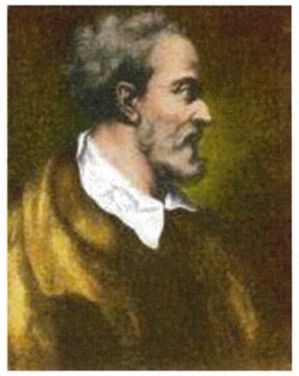
高次方程式の解法

□ カルダノは改良を加えて３次方程式の解の公式を発表した

前回，数学者**ジェロラモ・カルダノ**（1501～1576）が**ニッコロ・フォンタナ・タルタリア**（1499～1557）との約束を破り，1545 年に出版した『**アルス・マグナ**（大いなる技法）』という本の中で，3 次方程式の一般的解法を発表してしまったという話で終わった。そして，実はカルダノにも言い分があったとした。



ジェロラモ・カルダノ

ジェロラモ・カルダノは，母親の疎開先のイタリアのパビーアで生まれた。疎開していたのは，当時伝染病が流行していたからである。カルダノの父はミラノの弁護士で，幾何学などの数学の素養もあった。**レオナルド・ダ・ヴィンチ**（1452～1519）の友人であったといわれている。カルダノは父親に数学や語学などを教えられた。カルダノは，1524 年にパドヴァ大学で医学の学位をとった。医学のほかにカルダノは，天文学，物理学，数学などの広い分野の問題に興味をもち，占星術や賭博（とばく）にも手を出した。賭博はさておき，占星術は当時の医学の一分野であったため不自然なことではなかった。

さて，カルダノはタルタリアの公式をそのまま本で紹介したのではなかった。1543 年にカルダノは，弟子の**ルトビコ・フェラリ**（1522～1565）とボローニャに旅行した。そこで，前回登場したアントニオ・フィオールの師であって，ボローニャ大学教授であった**シピオーネ・デル・フェッロ**（1465～1526）のノートを見ることができた。そこには「3 次方程式の解の公式」が書かれていたのだ。カルダノは，デル・フェッロがタルタリアよりも早く 3 次方程式の解の公式を発見していることを知ることになったのである。

タルタリアとデル・フェッロの 3 次方程式の解の公式は，ともに特別な 3 次方程式にしか通用しないものであったが，カルダノはより応用のきく形に改良を加えている。また，カルダノは『アルス・マグナ』の中で，タルタリアやデル・フェッロが発明した部分をきちんと示している。なお，カルダノの自伝によると，カルダノはタルタリアとは後に和解したとされている。カルダノの業績はこれだけにとどまらない。彼は，『アルス・マグナ』の中で，初めて「**虚数**」の考え方を述べている。また，カルダノの弟子であったフェラリは 4 次方程式の解法をも発見していた。しかし，フェラリの方法はタルタリアの 3 次方程式の公式を補助的に使っていたため公表できなかった。『アルス・マグナ』は，3 次方程式の解法とともに， 4 次方程式の解法についても書かれた最初のものであり，40 章にわたっている。そして，カルダノは 4 次方程式の解法の発見はフェラリによるものであることも認めている。

『アルス・マグナ』は，カルダノの存命中の 1570 年に第 2 版が出されているほどよく読まれた書物であり，ルネッサンスにおける 3 大科学書の一つになっているほどの名著なのだ。

山脇の超数学講座 No. 23

□ 剰余の定理・因数定理・高次方程式

前回「3 次方程式の解の公式」を紹介したが，3 次以上の高次方程式は，一つの解を見つけることができれば，以下のような定理に基づいて解くことができる。

「$f(x)$，$g(x)$ を 2 つの整式（多項式）とすれば， $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$， $r(x)=0$ または $r(x)$ の次数＜ $g(x)$ の次数 となるような 整式 $q(x)$，$r(x)$ がただ1組だけ存在する」 という関係が成り立つ。

ここで， $q(x)$を， $f(x)$を $g(x)$ で割ったときの **商**， $r(x)$ を **余り**（**剰余**）という。

そして， $r(x)=0$ は， $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れることを意味する。これを整式の「**除法の原理**」という。

例1 $f(x)=2x^3-3x^2+4$ を $g(x)=x^2-3x+2$ で割った商 $q(x)$ と余り $r(x)$ は，整式の割り算を実行して，

$q(x)=2x+3$， $r(x)=5x-2$ と求められる。

現に $2x^3-3x^2+4=(x^2-3x+2)(2x+3)+5x-2$ が成り立っており，余り $5x-2$ は x^2-3x+2 より次数が低い。

除法の原理で， $g(x)=x-k$ とすると， $x-k$ の次数は 1 であるから，余りは定数となる。

そこで， $r(x)=R$（R は定数）とおくと， $f(x)=(x-k)\,q(x)+R$ ……① が成り立つ。

① で， $x=k$ とすると， $f(k)=R$ つまり， $\boxed{f(x) \text{ を } x-k \text{ で割った余りは， } f(k)}$ ……②

これが，「**剰余（余り）の定理**」である。

②において， $f(k)=R=0$ であれば， $f(x)$ は $x-k$ で割り切れることになり，この逆も成り立つから，

$\boxed{\text{整式 } f(x) \text{ が } x-k \text{ で割りきれるための必要十分条件は， } f(k)=0 \text{ である。}}$ これが「**因数定理**」である。

例2 $2x^4+5x^3+5x^2-2=0$ ……③ を解いてみよう。

$f(x)=2x^4+5x^3+5x^2-2$ とおくと， $f(-1)=2-5+5-2=0$ だから， $f(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。割り算により

$f(x)=(x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)$， ここで $q(x)=2x^3+3x^2+2x-2$ とおくと， $q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1-2=0$ より，

$$q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x+4)=(2x-1)(x^2+2x+2)$$

ゆえに，③の左辺は因数分解されて， $(x+1)(2x-1)(x^2+2x+2)=0$ となる。

$x+1=0$ または $2x-1=0$ または $x^2+2x+2=0$ ……④ ④は解の公式より，$x=-1\pm i$ となるから，

したがって，4 次方程式 ③ の解は， $x=-1,\ \frac{1}{2},\ -1\pm i$ （2 つの実数解と2 つの虚数解をもつ）

因数定理を拡張していくと， $x=\alpha_1$ が n 次方程式 $f(x)=0$ の解であるとき，$f(x)=(x-\alpha_1)q(x)$ （$q(x)$ は $n-1$ 次）と表され，これを $q(x)$ について，同じことを繰り返すと，

$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$ （a は定数） と因数分解できるはずである。

これより， $f(x)=0$ は， $x=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n$ の n 個の解をもつことになる。（k 重解は k 個と考える。）

n を自然数とすれば， $\boxed{n \text{ 次方程式は，複素数の範囲で，必ず } n \text{ 個の解をもつ。}}$

この定理を **代数学の基本定理** という。

上で述べてきた場合は，方程式の係数が実数の場合であるが，方程式の係数が複素数であっても代数学の基本定理は成り立つ。これらのことに厳密な証明を与えたのは，19世紀ドイツの数学者 **カール・フリードリヒ・ガウス**(1777～1855) である。タルタリアとカルダノの3次方程式をめぐる戦いは，ガウスによって集大成されたというべきであろう。しかし，方程式をめぐる論争は19世紀でもまだまだ続くのである。その話はまた別の機会にすることにしよう。